Prof. Dr. Alfred Toth

Einfachste Gesetze einer Mereotopologie gerichteter Mengen

1. Wie in Toth (2009) gezeigt, kann man aus der Menge S = (1, 2, 3) der Primzeichen 48 gerichtete semiotische Relationen konstruieren:

$(3_{\rightarrow a}\ 2_{\rightarrow b}\ 1_{\rightarrow c})$ $(3_{\rightarrow a}\ 1_{\rightarrow b}\ 2_{\rightarrow c})$ $(2_{\rightarrow a}\ 3_{\rightarrow b}\ 1_{\rightarrow c})$

$(3_{\rightarrow a}\ 2_{\rightarrow b}\ 1_{\leftarrow c})$ $(3_{\rightarrow a}\ 1_{\rightarrow b}\ 2_{\leftarrow c})$ $(2_{\rightarrow a}\ 3_{\rightarrow b}\ 1_{\leftarrow c})$

$(3_{\rightarrow a}\ 2_{\leftarrow b}\ 1_{\leftarrow c})$ $(3_{\rightarrow a}\ 1_{\leftarrow b}\ 2_{\leftarrow c})$ $(2_{\rightarrow a}\ 3_{\leftarrow b}\ 1_{\leftarrow c})$

$(3_{\leftarrow a}\ 2_{\leftarrow b}\ 1_{\leftarrow c})$ $(3_{\leftarrow a}\ 1_{\leftarrow b}\ 2_{\leftarrow c})$ $(2_{\leftarrow a}\ 3_{\leftarrow b}\ 1_{\leftarrow c})$

$(3_{\rightarrow a}\ 2_{\leftarrow b}\ 1_{\leftarrow c})$ $(3_{\rightarrow a}\ 1_{\leftarrow b}\ 2_{\leftarrow c})$ $(2_{\rightarrow a}\ 3_{\leftarrow b}\ 1_{\leftarrow c})$

$(3_{\leftarrow a}\ 2_{\leftarrow b}\ 1_{\rightarrow c})$ $(3_{\leftarrow a}\ 1_{\leftarrow b}\ 2_{\rightarrow c})$ $(2_{\leftarrow a}\ 3_{\leftarrow b}\ 1_{\rightarrow c})$

$(3_{\leftarrow a}\ 2_{\rightarrow b}\ 1_{\leftarrow c})$ $(3_{\leftarrow a}\ 1_{\rightarrow b}\ 2_{\leftarrow c})$ $(2_{\leftarrow a}\ 3_{\rightarrow b}\ 1_{\leftarrow c})$

$(3_{\leftarrow a}\ 2_{\leftarrow b}\ 1_{\leftarrow c})$ $(3_{\leftarrow a}\ 1_{\leftarrow b}\ 2_{\leftarrow c})$ $(2_{\leftarrow a}\ 3_{\leftarrow b}\ 1_{\leftarrow c})$

$(2_{\rightarrow a}\ 1_{\rightarrow b}\ 3_{\rightarrow c})$ $(1_{\rightarrow a}\ 3_{\rightarrow b}\ 2_{\rightarrow c})$ $(1_{\rightarrow a}\ 2_{\rightarrow b}\ 3_{\rightarrow c})$

$(2_{\rightarrow a}\ 1_{\rightarrow b}\ 3_{\leftarrow c})$ $(1_{\rightarrow a}\ 3_{\rightarrow b}\ 2_{\leftarrow c})$ $(1_{\rightarrow a}\ 2_{\rightarrow b}\ 3_{\leftarrow c})$

$(2_{\rightarrow a}\ 1_{\leftarrow b}\ 3_{\leftarrow c})$ $(1_{\rightarrow a}\ 3_{\leftarrow b}\ 2_{\leftarrow c})$ $(1_{\rightarrow a}\ 2_{\leftarrow b}\ 3_{\leftarrow c})$

$(2_{\leftarrow a}\ 1_{\leftarrow b}\ 3_{\leftarrow c})$ $(1_{\leftarrow a}\ 3_{\leftarrow b}\ 2_{\leftarrow c})$ $(1_{\leftarrow a}\ 2_{\leftarrow b}\ 3_{\leftarrow c})$

$(2_{\rightarrow a}\ 1_{\leftarrow b}\ 3_{\leftarrow c})$ $(1_{\rightarrow a}\ 3_{\leftarrow b}\ 2_{\leftarrow c})$ $(1_{\rightarrow a}\ 2_{\leftarrow b}\ 3_{\leftarrow c})$

$(2_{\leftarrow a}\ 1_{\leftarrow b}\ 3_{\rightarrow c})$ $(1_{\leftarrow a}\ 3_{\leftarrow b}\ 2_{\rightarrow c})$ $(1_{\leftarrow a}\ 2_{\leftarrow b}\ 3_{\rightarrow c})$

$(2_{\leftarrow a}\ 1_{\rightarrow b}\ 3_{\leftarrow c})$ $(1_{\leftarrow a}\ 3_{\rightarrow b}\ 2_{\leftarrow c})$ $(1_{\leftarrow a}\ 2_{\rightarrow b}\ 3_{\leftarrow c})$

$(2_{\leftarrow a}\ 1_{\leftarrow b}\ 3_{\leftarrow c})$ $(1_{\leftarrow a}\ 3_{\leftarrow b}\ 2_{\leftarrow c})$ $(1_{\leftarrow a}\ 2_{\leftarrow b}\ 3_{\leftarrow c})$

Wir wollen nun in Kürze die elementaren mereotopologischen Gesetze (vgl. z.B. Cohn und Varzi 2003) angeben, die für gerichtete Objekte gültig sind. Man beachte, dass man mit den der klassischen Mengenlehre nachgebildeten Operationen lediglich mit gleichgerichteten Objekten rechnen kann.

2. Closure-Gesetze

2.1 $\varnothing^{\rightarrow} = c(\varnothing^{\rightarrow})$ 3.1 $c(c(x^{\rightarrow})) \subseteq c(x^{\rightarrow})$

2.2 $\varnothing^{\rightarrow} \neq c(\varnothing^{\leftarrow})$ 3.2 $c(c(x^{\rightarrow})) \subseteq c(x^{\leftarrow})$

2.3 $\varnothing^{\leftarrow} \neq c(\varnothing^{\rightarrow})$ 3.3 $c(c(x^{\leftarrow})) \subseteq c(x^{\rightarrow})$

2.4 $\varnothing^{\leftarrow} = c(\varnothing^{\leftarrow})$ 3.4 $c(c(x^{\leftarrow})) \subseteq c(x^{\leftarrow})$

4.1 $x^{\rightarrow} \subseteq c(x^{\rightarrow})$ 5.1 $c(x^{\rightarrow}) \cup c(y^{\rightarrow}) = c(x^{\rightarrow} \cup y^{\rightarrow})$

4.2 $x^{\rightarrow} \not\subset c(x^{\leftarrow})$ 5.2 $c(x^{\rightarrow}) \cup c(y^{\leftarrow}) = c(x^{\rightarrow} \cup y^{\leftarrow})$

4.3 $x^{\leftarrow} \not\subset c(x^{\rightarrow})$ 5.3 $c(x^{\leftarrow}) \cup c(y^{\rightarrow}) = c(x^{\leftarrow} \cup y^{\rightarrow})$

4.4 $x^{\leftarrow} \subseteq c(x^{\leftarrow})$ 5.4 $c(x^{\leftarrow}) \cup c(y^{\leftarrow}) = c(x^{\leftarrow} \cup y^{\leftarrow})$

3. Äquivalenzen des Zusammenhangs

$C_1\ (x, y) \Leftrightarrow x^{\rightarrow} \cap y^{\rightarrow} \neq \varnothing\ /\ x^{\rightarrow} \cap y^{\leftarrow} = \varnothing\ /\ x^{\leftarrow} \cap y^{\rightarrow} = \varnothing\ /\ x^{\leftarrow} \cap y^{\leftarrow} \neq \varnothing$

$C_2\ (x, y) \Leftrightarrow x^{\rightarrow} \cap c(y^{\rightarrow}) \neq \varnothing\ /\ x^{\rightarrow} \cap c(y^{\leftarrow}) \neq \varnothing\ /\ x^{\leftarrow} \cap c(y^{\rightarrow}) \neq \varnothing\ /\ x^{\leftarrow} \cap c(y^{\leftarrow}) \neq \varnothing$

od. $c(x^{\rightarrow}) \cap y^{\rightarrow} \neq \varnothing\ /\ c(x^{\rightarrow}) \cap y^{\leftarrow} \neq \varnothing\ /\ c(x^{\leftarrow}) \cap y^{\rightarrow} \neq \varnothing\ /\ c(x^{\leftarrow}) \cap y^{\leftarrow} \neq \varnothing$

$C_3\ (x, y) \Leftrightarrow c(x^{\rightarrow}) \cap c(y^{\rightarrow}) \neq \varnothing\ /\ c(x^{\rightarrow}) \cap c(y^{\leftarrow}) \neq \varnothing\ /\ c(x^{\leftarrow}) \cap c(y^{\rightarrow}) \neq \varnothing\ /\ c(x^{\leftarrow}) \cap c(y^{\leftarrow}) \neq \varnothing$

4. Mereotopologische Basis-Definitionen

4.1. $O(x^{\rightarrow}, y^{\rightarrow}) := \exists z(P(z^{\rightarrow}, x^{\rightarrow}) \wedge P(z^{\rightarrow}, y^{\rightarrow}))$

$O(x^{\leftarrow}, y^{\leftarrow}) := \exists z(P(z^{\leftarrow}, x^{\leftarrow}) \wedge P(z^{\leftarrow}, y^{\leftarrow}))$ Überlappung

4.2. $A(x, y) := C(x^{\rightarrow}, y^{\rightarrow}) \wedge \neg O(x^{\rightarrow}, y^{\rightarrow})$

$A(x^{\leftarrow}, y^{\leftarrow}) := C(x^{\leftarrow}, y^{\leftarrow}) \wedge \neg O(x^{\leftarrow}, y^{\leftarrow})$ Angrenzung

4.3. $E(x, y) := P(x^{\rightarrow}, y^{\rightarrow}) \wedge P(y^{\rightarrow}, x^{\rightarrow})$

$E(x, y) := P(x^{\leftarrow}, y^{\leftarrow}) \wedge P(y^{\leftarrow}, x^{\leftarrow})$ Gleichheit

4.4. $PP(x, y) := P(x^{\rightarrow}, y^{\rightarrow}) \wedge \neg P(y^{\rightarrow}, x^{\rightarrow})$

$P(x^{\leftarrow}, y^{\leftarrow}) \wedge \neg P(y^{\leftarrow}, x^{\leftarrow})$ echter Teil

4.5. $TP(x, y) := P(x^{\rightarrow}, y^{\rightarrow}) \wedge \exists z^{\rightarrow}(A(z^{\rightarrow}, x^{\rightarrow}) \wedge A(z^{\rightarrow}, y^{\rightarrow}))$

$P(x^{\leftarrow}, y^{\leftarrow}) \wedge \exists z^{\leftarrow}(A(z^{\leftarrow}, x^{\leftarrow}) \wedge A(z^{\leftarrow}, y^{\leftarrow}))$ tangentialer Teil

Bibliographie

Cohn, Anthony G./Varzi, Achille C. Mereotopological connection. In: Journal of Philosophical Logic 32/4, 2003, S. 357-390.

Digitalisat: http://www.columbia.edu/~av72/papers/Jpl_2003.pdf

Toth, Alfred, Gerichtete semiotische Objekte. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, http://www.mathematical-semiotics.com/pdf/Gericht.%20sem.%20Obj..pdf (2009)

20.12.2010